Так называются уравнения вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа (коэффициенты), n – натуральное число, а x – искомая неизвестная величина. При $a_n \neq 0$ уравнение (1) называется *алгебраическим уравнением n-го порядка*[1].

Алгоритмы решения при $n = 1$ (линейные уравнения) и $n = 2$ (квадратные уравнения) изучаются по основной программе в курсе алгебры 9-летней школы. Здесь мы обсудим методы решений уравнений (1) при $n > 2$.

В силу теоремы К. Гаусса любое алгебраическое уравнение n-го порядка имеет не более n корней. В математике разработаны способы вычисления корней алгебраических уравнений 3-го порядка (формула Кардано) и 4-го порядка *(метод Л. Феррари)* – см. *[2]*. Однако в школьном курсе *математики эти методы не рассматриваются.*

С другой стороны, Н.Х. Абель доказал, что для любого фиксированного $n \geqslant 5$ не существует единой формулы, *которая бы выражала корни любого алгебраического уравнения n-го порядка* через его коэффициенты при помощи *конечного количества арифметических операций и радикалов* $\sqrt[m]{\ }$, $m = 2, 3, \ldots, n$ (неразрешимость в радикалах алгебраических уравнений степени выше 4-й). Более того, из результатов Э. Галуа следует, что и для некоторых конкретных алгебраических уравнений таких формул нет. Например, у уравнения $x^5 - 4x - 2 = 0$, которое имеет три действительных корня, ни один из корней нельзя выразить в указанном выше смысле с помощью арифметических операций и радикалов через его коэффициенты 1, 0, – 4, – 2 (а значит, и радикалов от любых иррациональных чисел).

В школьном курсе алгебры не может быть какого-то единого и, более того, всеобщего метода решения алгебраических уравнений высших степеней ($n > 2$). Имеется только несколько частных методик, позволяющих решать некоторые их специальные типы. Не все эти методики являются алгоритмическими, т. е. точными и ясными способами решения четко очерченного класса уравнений (как это было в случае уравнений линейных или квадратных). Тем не менее, попытка систематизации этих методов, которая приведена в этой работе, будет интересна и полезна школьникам при подготовке к олимпиадным и вступительным экзаменам по математике в вуз. Значение умения решать алгебраические уравнения велико еще и потому, что многие другие типы уравнений, встречающиеся в задачниках и на экзамене, методом подстановки сводятся *к алгебраическим уравнениям.*

Прежде, чем перейти к основному изложению, отметим *следующее.*

1. Систематизация методов решения алгебраических уравнений начинается с осознания того, что существуют методы решения уравнений, применимые к отдельным представителям любого типа. Это общие методы: метод разложения на множители и метод замены переменной. Сюда же необходимо причислять методы, основанные на использовании строгой монотонности, либо возможности сравнить множества значений левой и правой частей уравнений (§ 1 ниже).

2. В случае конкретных типов уравнений (алгебраических, рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических, степенных) все или часть общих методов имеют одну или более известных, наиболее часто применяемых спецификаций – конкретных воплощений именно для рассматриваемого типа уравнений. *Это специфические методы* (о *них* § 2).

3. Для каждого типа уравнений разработаны нестандартные *приемы, не вытекающие из общих идей, но часто более эффективные в конкретных ситуациях* (§ 3).

[1] Чаще – *алгебраическим уравнением степени n (замечание редакции).*

§ 1. Общие методы (ОМ) с точки зрения алгебраических уравнений

ОМ 1. Метод разложения на множители

В общем варианте идея этого метода выражена следующей цепочкой преобразований данного уравнения

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) = 0. \qquad (2)$$

Далее рассматривают либо равносильную совокупность двух систем

$$1)\ \begin{cases}\varphi_1(x) = 0,\\ \varphi_2(x) - \text{ имеет смысл;}\end{cases} \quad 2)\ \begin{cases}\varphi_2(x) = 0,\\ \varphi_1(x) - \text{ имеет смысл;}\end{cases}$$

либо совокупность двух уравнений:

а) $\varphi_1(x) = 0$;

б) $\varphi_2(x) = 0$.

Во втором случае могут быть получены посторонние корни, поэтому здесь обязательна проверка корней или иной их анализ на пригодность.

В случае уравнения (1) правая его часть равна 0, причем допустимыми значениями неизвестной x являются любые действительные числа. Следовательно, остается лишь суметь разложить на множители многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

в произведение многочленов $Q_m(x)$ и $H_k(x)$ меньшей, чем n, степени.

$$\text{Если } P_n(x) = Q_m(x)\,H_k(x), \text{ то } (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q_m(x) = 0 \\ Hk(x) = 0. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Одним из основных способов разложения на множители при этом служит прием выгодной группировки слагаемых. По цели, которая достигается этой группировкой, полезно осознанно выделять следующие случаи.

1. Вынос за скобку некоторого общего выражения.
2. Выделение полных квадратов вида $a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. Выделение разности квадратов $a^2 - b^2$.
4. Выделение полных кубов вида $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
5. Выделение суммы (разности) кубов $a^3 \pm b^3$.

Этот список легко продолжить, если (в случае углубленного изучения математики) иметь в виду алгебраические формулы для $(a \pm b)^n$, $a^n - b^n$, $a^{2k+1} + b^{2k+1}$, $(a + b + c)^k$ и другие при $n > 3$, $k > 1$, $n, k \in N$. Кроме того, для получения искомого разложения эти подходы могут быть использованы в комбинации друг с другом.

Приведем примеры на случаи 1–5.

Пример 1. $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^4 + x^3 + x^2) - (2x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + x + 1) - 2(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Пример 2. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [(x^2)^2 - 2x^2 \cdot (2x) + (2x)^2] - 2x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x^2 - 2x) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Пример 3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [(x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 4] - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2 - x)(x^2 - 2 + x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; -1; 1; 2\}.$$

Пример 4. $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 4x^3 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{4} = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}.$$

Пример 5. $9x^3 + 15x^2 + 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (8x^3 + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^3 + (2x + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = -(2x + 1)^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 1 = -(2x + 1) \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

Приведем также иллюстрацию применения иных алгебраических формул.

Пример 6 (*5-я Соросовская олимпиада, 9 класс*). Решите уравнение $x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 0$.

Решение. В силу формулы

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

многочлен в левой части уравнения является полным квадратом трехчлена $x^2 + 2x - 2$, следовательно, исходное уравнение равносильно квадратному –

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

(Другие способы решений этого уравнения см. замечание в СМ 2 и пример 25 в СМ 4.)

Задача 1. Решите уравнения:

1) $x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$; $\left(x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}\right)$

2) $2x^4 + x^2(x + 2) - 3(x + 2)^2 = 0$; $(\{-1; 2\})$

3) $(x^2 + 2x)^2 - (x + 2)(2x^2 - x) = 6(2x -$

$\left(\left\{1; 3; -3 \pm \sqrt{11}\right\}\right)$

4) $x^4 + x^3 + 6x = 8$; $(\{-2; 1\})$

5) $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$; $\left(\left\{\pm\sqrt[4]{6}; \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}}\right\}\right)$

6) $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x -$

$\left(\left\{1; -4; \frac{3}{2}; \frac{-1}{3}\right\}\right)$

7) $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 7 = 0$; (нет корн

8) $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$. *Указание.* Преобразуйте уравне с помощью замены переменной $t = x^{-1}$ в $t^4 + 4t - 1 =$ затем выделите полные квадраты $(t^2 + 1)^2 - 2(t - 1)^2$

Замечание. Задача 1.8) показывает (см. также пример что иногда не обязательно стремиться к чистому вос щению какой-либо формулы сокращенного умножен Действительно, если $a^2 - cb^2 = 0$, где $c > 0$, то разложе достигнуто: $\left(a - b\sqrt{c}\right)\left(a + b\sqrt{c}\right) = 0$.

ОМ 2. Метод подстановки

Суть этого метода по отношению к уравнен $f(x) = g(x)$ состоит в том, чтобы найти функции $t = \varphi($ $y = h(t)$, для которых при любом $x \in D(f) \cap D(g)$ (т. е. любого допустимого значения x рассматриваемого у нения) выполняется равенство

$$f(x) - g(x) = h(\varphi(x)).$$

В этом случае достаточно решить уравнение $h(t) =$ затем для каждого его корня t_0 решить уравнение

$$\varphi(x) = t_0.$$

Совокупность всех полученных таким образом кор $x \in D(f) \cap D(g)$ уравнений (*) будет искомым множест решений исходного уравнения. Функция $t = \varphi(x)$ назы ется в подобной ситуации *подстановкой*.

В случае алгебраических уравнений, как правил роли $\varphi(x)$ применяются многочлены.

Пример 7. $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$.

Решение. Пусть $t = x^2 - 7x + 13$. Тогда данное урав ние в силу $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$ можно записа виде $t^2 - t = 0$. Отсюда имеем $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Остал решить два квадратных уравнения: 1) $x^2 - 7x + 13$ 2) $x^2 - 7x + 13 = 1$.

Ответ: $\{3; 4\}$.

Пример 8. $(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 63$.

Решение. Заметим, что

$(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$,

$(x - 2)(x + 7) = x^2 + 5x - 14$

и воспользуемся подстановкой $t = x^2 + 5x - 14$. Тогд исходного уравнения имеем

$$t(t + 18) = 63.$$

Его корни $t_1 = 3$, $t_2 = -21$. Теперь остается решить квадратных уравнений:

1) $x^2 + 5x - 14 = 3$;

2) $x^2 + 4x - 14 = -21$.

Ответ: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{93}}{2}$.

Пример 9 (*2-я Соросовская олимпиада, I тур*).

$$(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5.$$

Указание. Перемножить выражения в 1-й и 4-й, 2-й и 3-й скобках, применить подстановку $t = 12x^2 - 5x$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\right\}$.

О применении различных специальных подстановок *при решении алгебраических уравнений смотри ниже* в § 2 и § 3.

Задача 2. Решите уравнения:

1. $(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9)$;

2. $\frac{x^2+4}{x} + \frac{x}{x^2+3x+4} + \frac{11}{2} = 0$;

3. $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$;

4. $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30$.

Ответы: 1. $\left\{-1; 9; \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}\right\}$. 2. $\{-4; -1\}$. *Указание.* Каждую дробь почленно разделить на x и применить подстановку $t = x + \frac{4}{x}$. 3. $\left\{\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right\}$: *Указание.* $t = 4x + \frac{7}{x}$. 4. *Указание.* Разложить выражения во второй и третьей скобках и *перемножить линейные множители по другому*, применить подстановку $t = x^2 - 3x + 1$. Тогда $t_1 = 6$, $t_{2,3} = 5 \pm \sqrt{30}$.

ОМ 3. Метод строгой монотонности

Он основан на следующей очевидной *теореме 1:*

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на множестве X, то уравнение $f(x) = a$ (с константой a в правой части) не может иметь на множестве X более одного корня.

Действительно, иногда с помощью каких-либо приемов (или подбором) удается найти один корень данного уравнения. Если при этом к этому уравнению применима приведенная выше теорема, то найденный корень – единственный. Процесс поиска корней будет закончен.

В связи с теоремой 1 напомним, что функция f называется *строго монотонной на множестве X*, если она либо возрастающая, либо убывающая на множестве X. Функция f называется *возрастающей (убывающей) на множестве X*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Чтобы успешно применять приведенную выше теорему, необходимо:

1) знать промежутки монотонности элементарных функций;

2) уметь находить промежутки монотонности у более сложных функций.

С первым требованием все предельно ясно – надо знать! По отношению к алгебраическим уравнениям список таких фактов небольшой: степенные функции вида

$$y = x^{2k-1},\ k \in N$$

возрастают на всем множестве R, а степенные функции

$$y = x^{2k},\ k \in N$$

возрастают на множестве $[0; +\infty)$ и убывают на множестве $(-\infty; 0]$.

Что касается второго (на самом деле, основного) умения, то это тема специального разговора. Чтобы не отклоняться от основного изложения, мы здесь только перечислим основные возможные способы достижения этой цели (подробнее вопрос изложен, например, в [1], [4]):

а) используя определение строгой монотонности;

б) на основе свойств, указывающих как сохраняется или трансформируется поведение функций в смысле монотонности при совершении арифметических операций над ними, а также при создании сложной функции (операции композиции);

в) с помощью производных.

Пример 10. $x^5 + 3x^3 + 5x - 15\sqrt{2} = 0$.

Решение. Заметим, что функции $y_1 = 5x - 15\sqrt{2}$, $y_2 = 3x^3$ и $y_3 = x^5$ являются возрастающими на всем R. Следовательно, также возрастающей является функция $y = y_1 + y_2 + y_3$. Тогда, в силу теоремы 1, данное уравнение не может иметь более одного корня. Остается проверить, что ему удовлетворяет значение $x = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Пример 11. $x^6 + 2x^4 + 3x^2 - 54 = 0$.

Решение. Очевидно, что функция

$$f(x) = x^6 + 2x^4 + 3x^2 - 54$$

возрастает на множестве $[0; +\infty)$. Следовательно, на этом множестве у исходного уравнения не более одного решения. Это $x = \sqrt{3}$. Теперь достаточно заметить, что функция f четная и поэтому уравнению $f(x) = 0$ вместе с каждым x удовлетворяет также и значение $-x$, или использовать убывание функции f на множестве $(-\infty; 0)$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

Замечание. Иногда вместо теоремы 1 применяется ее *следствие*.

Если функция $y = f(x) - g(x)$ строго монотонна на множестве X,[2] то уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь более одного корня.

Задача 3. Решите уравнение методом ОМ 3:

1) $x^{19} + x^{99} = 3 - x^{1999}$; $(x = 1)$

2) $|x| + 9|x|^9 + x^{98} = 11$. $(x = \pm 1)$

ОМ 4. Метод сравнения множеств значений

В его основе следующая *теорема 2*:

Если для всех $x \in X$ выполняются неравенства $f(x) \geq a$ и $g(x) \leq a$, то уравнение $f(x) = g(x)$ на множестве X равносильно системе двух уравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases} \quad (4)$$

---

[2] Например, когда f – возрастает на X, а g – убывает на X, или наоборот.

Пример 12. $x^8 - 7x^4 - 4x^2 + 20 = 0.$

Решение. Данное уравнение равносильно

$$x^8 - 8x^4 + 16 = -(x^4 - 4x^2 + 4).$$

Выражение в левой части этого уравнения есть полный квадрат, следовательно, оно неотрицательно на R. Аналогично выражение в правой части не может принимать положительных значений. По теореме 2 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\left(x^4-4\right)^2=0,\\ \left(x^2-2\right)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=2,\\ x=\pm\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

Замечание. Если на X либо $\begin{cases}f(x)>a,\\ g(x)\le a,\end{cases}$ либо $\begin{cases}f(x)<a,\\ g(x)\ge a,\end{cases}$ то уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет корней.

В общей ситуации сила метода ОМ 4 проявляется в том, что при переходе от уравнения $f(x) = g(x)$ к системе (4) выражения $f(x)$ и $g(x)$, которые могут быть весьма различными по своему «типу», разъединяются и не «мешают» друг другу в процессе решения возникшей системы (это особенно характерно в тех случаях, когда уравнение имеет смешанный тип, т. е. в левой и правой частях уравнения встречаются представители различных классов функций: иррациональных, тригонометрических, показательных и т. д.). Для иллюстрации этой мысли приведем несколько уравнений для самостоятельного решения.

Задача 4. Решите уравнение, используя теорему 2:

1. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 1 - x^6 + 2x^3.$
2. $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}.$
3. $2x - 2\sqrt{2x+3} + 4 = 1 - \sqrt{x^2-2x+2}.$
4. $\sqrt{2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}} = \sin\pi x + 1.$
5. $|x^2 - 5x + 6| + 1 = \cos^2\pi x.$

Ответы: **1.** $x = 1$. **2.** $x = 1$. **3.** $\varnothing$. **4.** $x = \frac{1}{2}$. **5.** $\{2; 3\}$.

§ 2. Специальные методы (СМ) решения алгебраических уравнений

СМ 1. Метод перебора делителей крайних коэффициентов

В случае уравнения (1) с целыми коэффициентами известен метод поиска всех его рациональных корней, если они имеются. Метод основан на следующей *теореме 3:*

***Если несократимая дробь** $\frac{p}{q}$ **– корень алгебраического уравнения (1) степени** n **с целыми коэффициентами** a_i, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, **то** p **– делитель свободного члена** a_0, **а** q **– делитель старшего коэффициента** a_n. **В частности, если** $a_n = 1$, **то каждый рациональный корень** x_0 **уравнения (1) с целыми коэффициентами является целым числом, причем делителем свободного члена** a_0.*

В силу этой теоремы для того, чтобы найти рациональные корни уравнения (1) с целыми коэффициентами, достаточно проверить все дроби $\frac{p}{q}$, для которых a_0 делится (без остатка!) на p и a_n делится на q.

Пример 13. $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0.$

Решение. Все коэффициенты данного уравнения целые, причем $n = 3$ и $a_3 = 1$. Поэтому достаточно проверить только делители свободного члена $a_0 = -21$. Число -21 имеет 8 (целых) делителей: $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$. Из них уравнению удовлетворяют $x = -7$, $x = -3$, $x = 1$. Поскольку у кубического уравнения не может быть более трех корней, найдены все корни.

Ответ: $\{-7; -3; 1\}$.

Заметим, что если количество имеющихся рациональных корней у уравнения (1) с целыми коэффициентами меньше, чем степень n, то сформулированная выше теорема также полезна. С ее помощью находят сначала все рациональные корни, а затем понижают степень уравнения. Эта возможность основана на ***следствии из теоремы Безу***:

Если x_0 – корень алгебраического уравнения (1), то многочлен $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ делится на $x - x_0$, т. е. имеется многочлен $Q(x)$ степени $x - 1$ такой, что $P_n(x) = (x - x_0)\,Q(x)$.

Таким образом, если x_0 – корень уравнения (1), то для завершения решения достаточно найти коэффициенты многочлена $Q(x)$ и решить уравнение $Q(x) = 0$. Для поиска коэффициентов Q используется так называемая *схема Горнера*, с которой школьники знакомятся при углубленном изучении математики. Можно с этой задачей справиться и без схемы Горнера. Достаточно поделить многочлен $Q(x)$ на двучлен $x - x_0$ «уголком», по аналогии с делением «уголком» многозначных натуральных чисел. При этом, если уже найдены два корня x_1 и x_2, то для поиска остальных корней можно сразу делить $P_n(x)$ на $(x - x_1)(x - x_2)$, т. е. на $x^2 - (x_1 + x_2)(x + x_1x_2)$.

Пример 14. $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0.$

Решение. Здесь $n = 4$ и $a_n = 1$, а свободный член $a_0 = -3$ имеет четыре делителя $\pm 1, \pm 3$. Проверка показывает, что $x = \pm 1$ являются корнями данного уравнения. Поскольку $n = 4$, то могут быть еще два (действительных) корня. По теореме Безу многочлен

$$P_4(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$$

делится на $x - 1$ и $x + 1$, т. е. на $x^2 - 1$. Найдем частное. Для этого поделим $P_4(x)$ на $x^2 - 1$ «уголком», используя при этом в каждом шаге результат от деления «старшего» члена на «старший»:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^4 \qquad\ - x^2} & x^2 - x + 3 \\
-x^3 + 3x^2 + x & \\
-\ \underline{-x^3 \qquad\ + x} & \\
3x^2 - 3 & \\
-\ \underline{3x^2 - 3} & \\
0 &
\end{array}$$

Но дискриминант квадратного уравнения $x^2 - x + 3$ отрицателен, поэтому корней у него нет. Исходное уравнение имеет только два корня ± 1.

Задача 5. Решите уравнения:

1) $3x^3 - 5x^2 + 3x - 5 = 0$; $\left(x = \frac{5}{3}\right)$

2) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24 = 0$; $(\{-1; -2; -3; 4\})$

3) $x^4 - 27x^2 - 14x + 120 = 0$; $(\{-4; -3; 2; 5\})$

4) $x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36 = 0$; $(\{-3; -2\})$

5) $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$. $(\{1; 2; -2\})$

СМ 2. Метод решения возвратных уравнений

Уравнение (1) называется *симметрическим*, если $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, …, т. е. если равноудаленные от концов коэффициенты попарно одинаковы.

Например, симметрическими являются уравнения:

$$x^5 + 21x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 21x + 1 = 0,$$
$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Многие симметрические уравнения удается решить. Для этого разработана методика понижения степени симметрического уравнения не менее, чем вдвое. Напомним основные моменты.

Пусть сначала $n = 2k$. Так как у симметрического уравнения $a_0 \neq 0$, то $x = 0$ – не корень. Поэтому после деления на x^k обеих частей уравнения (1) получаем следующее равносильное уравнение

$$a_n x^k + a_{n-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x^{1-k} + a_0 x^{-k},$$

$$a_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \ldots + \left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k = 0,$$

которое подстановкой $t = x + \frac{1}{x}$ сводится к алгебраическому уравнению степени k. Для этого достаточно применить соотношения типа

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t, \qquad (5)$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2,$$

. . . .

Если $n = 2k + 1$, то проверка показывает, что $x = -1$ является корнем (симметрического уравнения нечетной степени). Тогда делением его левой части на $x + 1$ оно сводится к симметрическому (!) уравнению степени $2k$. И это позволяет снова применить подстановку $t = x + \frac{1}{x}$.

Пример 15. $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение. Это симметрическое уравнение 4-го порядка. Ясно, что $x \neq 0$. После деления левой части уравнения на x^2 и соответствующей группировки слагаемых получаем $2t^2 + 3t - 20 = 0$, где $t = x + \frac{1}{x}$. Следовательно, $t_1 = -4$, $t_2 = 2{,}5$ и остается решить два уравнения: $x + \frac{1}{x} = -4$ и $x + \frac{1}{x} = 2{,}5$.

Ответ: $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 2$.

Пример 16. $x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение. Это симметрическое уравнение нечетного порядка. Один из его корней $x = -1$ (*для симметрических уравнений любого нечетного порядка так будет всегда!*). Делением левой части уравнения на $x + 1$ «уголком» получаем

$$x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 =$$
$$= (x + 1)(x^6 + x^5 - 6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + x + 1).$$

Следовательно, теперь достаточно решить уравнение

$$x^6 + x^5 - 6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + x + 1 = 0,$$

которое снова симметрическое, но четной степени. Делим его на x^3, получаем

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0.$$

Обозначив $t = x + \frac{1}{x}$, имеем $t^3 + t^2 - 9t - 9 = 0$ (см. равенства (5)), т. е. $(t + 1)(t^2 - 9) = 0$. Отсюда получаем $t_1 = -1$, $t_2 = -3$, $t_3 = 3$. Теперь достаточно решить три уравнения:

$$x + \frac{1}{x} = -1,\ x + \frac{1}{x} = -3,\ x + \frac{1}{x} = 3.$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_{4,5} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Методика решения симметрических уравнений может быть обобщена. Покажем это на примере так называемых *возвратных уравнений 4-го порядка*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0\ (a \neq 0,\ m \neq 0). \qquad (6)$$

Здесь $a_4 = a$, $a_3 = b$, $a_2 = c$, $a_1 = bm$, $a_0 = am^2$, поэтому

$$\frac{a_0}{a_4} = m^2 = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2.$$

Такое соотношение позволяет применить прежнюю идею: деление на x^2 с последующей заменой переменной, только теперь необходима подстановка $t = x + \frac{m}{x}$.

Действительно, из уравнения (6) получаем

$$a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0,$$

$$at^2 + bt + (c - 2am) = 0.$$

При $m = -1$ уравнение (6) называют *кососимметрическим*. К таким уравнениям применяется подстановка $t = x - \frac{1}{x}$.

Пример 17. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$. $\left(x = -1 \pm \sqrt{2}\right)$

Пример 18. $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$.

Указание. Здесь $m = 2$, поэтому подстановка $t = x + \frac{2}{x}$.

Ответ: действительных корней нет.

Замечание. Уравнение примера 6 – возвратное с $m = -2$. Его можно решить с помощью подстановки $t = x - \frac{2}{x}$.

В некоторых случаях с помощью вспомогательной подстановки удается привести уравнение к известному типу.

Пример 19. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x - 1 = 0$.

Решение. Сначала применим подстановку $x = y - 1$. Получится уравнение $y^4 - 2y^3 - 3y^2 + 2y + 1 = 0$. Оно кососимметрическое (относительно y), делением на y^2 и подстановкой $t = y - \frac{1}{y}$ получим $t^2 - 2t - 1 = 0$. Отсюда $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Осталось решить два уравнения $y - \frac{1}{y} = 1 - \sqrt{2}$ и $y - \frac{1}{y} = 1 + \sqrt{2}$, а затем выразить x.

Ответ: $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{7 - 2\sqrt{2}}\right)$,

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{7 + 2\sqrt{2}}\right).$$

Задача 6. Решите уравнения:

1) $x^4 + x^3 + x^2 - x + 1 = 0$; $(\varnothing)$

2) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; $\left(\frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)\right)$

3) $x^4 + x^3 + 4x^2 + 5x + 25 = 0$; $(\varnothing)$

4) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$; $\left(\left\{-1; 2; \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{17}\right)\right\}\right)$

5) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$; $(x = \pm 1)$

6) $x^5 + 3x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$; $\left(\left\{-1; \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)\right\}\right)$

7) $x^4 + 4x^3 + 50x^2 + 92x - 1470 = 0$. $\left(x = -1 \pm \sqrt{\sqrt{1999} - 22}\right)$

СМ 3. Метод неопределенных коэффициентов

Покажем его на примере алгебраических уравнений 4-го порядка. Известно, что каждый многочлен 4-го порядка может быть представлен как произведение двух квадратных многочленов

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2).$$

При этом должны быть выполнены следующие равенства коэффициентов при одинаковых степенях x слева и справа (если представить правое выражение в виде многочлена):

(x^0) $e = c_1c_2$,

(x^1) $d = b_1c_2 + b_2c_1$,

(x^2) $c = a_1c_2 + a_2c_1 + b_1b_2$,

(x^3) $b = a_1b_2 + a_2b_1$,

(x^4) $a = a_1a_2$.

Таким образом, задача о разложении многочлена 4-го порядка превращается в задачу о нахождении величин a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2$ по коэффициентам a, b, c, d, e с помощью равенств $(x^0) - (x^4)$. В общем виде эту задачу решить столь же трудно, как и исходную. В связи с этим обычно применяют следующие упрощения.

Во-первых, не сужая общности поиска можно считат что $a_1 = a$ и $a_2 = 1$. Во-вторых, $c_2 = \frac{e}{c_1}$. Остается найти т коэффициента: b_1, b_2 и c_1.

Отметим, что при целых a, b, c, d, e коэффициен разложения, в частности c_1 и c_2, могут быть даже иррац ональными. Например,

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2 = \left(x^2 + x - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + x + \sqrt{2}\right).$$

Однако достаточно часто в задачах, предлагаем школьникам, коэффициенты разложения оказывают целыми. В связи с этим можно (рискнуть и) использова третье упрощающее условие: c_1 – делитель коэффициен e. При этом можно начать с проверки $c_1 = 1$. Если же д $c_1 = 1$ не существуют числа b_1 и b_2, удовлетворяющие р венствам $(x^1) - (x^3)$, то поиск продолжают, но при $c_1 = -$ Если и в этом случае будет неудача, то необходимо про рить одно за другим каждое значение c_1, равное каком либо делителю числа e (при этом еще раз подчеркнем, ч так может быть найдено только разложение с целы коэффициентами a_1, a_2, c_1 и c_2; в общем случае необход мо искать коэффициенты b_1, b_2, c_1 и c_2, не приравнивая к конкретному числу).

Пример 20. $x^4 - 9x^2 - 6x - 1 = 0$.

Решение. В силу приведенных выше пояснений име

$$x^4 - 9x^2 - 6x - 1 = (x^2 + b_1x + c_1)\left(x^2 + b_2x - \frac{1}{c_1}\right).$$

Предполагая, что коэффициент $\frac{1}{c_1}$ будет целым чи лом, возьмем $c_1 = 1$. Тогда при любом x должно выпо няться равенство

$$x^4 - 9x^2 - 6x - 1 = (x^2 + b_1x + 1)(x^2 + b_2x - 1).$$

Отсюда, как это показано выше в общем случае, след ет система уравнений на соответствующие коэффициен при степенях x^3, x^2, x:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0, \\ b_1b_2 = -9, \\ b_2 - b_1 = -6. \end{cases}$$

В этом примере первая же попытка ($c_1 = 1$) удачна, т как полученная система уравнений относительно b_1 и очевидно, имеет решение $b_1 = 3$, $b_2 = -3$. Следовательн разложение многочлена 4-го порядка найдено, а данн уравнение равносильно совокупности двух квадратн уравнений: 1) $x^2 + 3x + 1 = 0$; 2) $x^2 - 3x - 1 = 0$.

Ответ: $\left\{\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Пример 21. $x^4 - 7x^2 + 1 = 0$.

Решение. Применим к этому биквадратному уравнен метод неопределенных коэффициентов. Заметив, что данного уравнения $a = 1$, $e = 1$, делаем попытку най разложение при $a_1 = a_2 = 1$ и $c_1 = c_2 = 1$:

$$x^4 - 7x^2 + 1 = (x^2 + b_1x + 1)(x^2 + b_2x + 1)$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0, \\ b_1b_2 = -7. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения $\begin{cases} b_1 = 3, \\ b_2 = -3 \end{cases}$ и $\begin{cases} b_1 = -3, \\ b_2 = 3. \end{cases}$

Однако в обоих вариантах имеем совокупность уравнений

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - 3x + 1 = 0 \\ &x^2 + 3x + 1 = 0, \end{aligned}\right.$$

решением которой являются числа $\frac{\pm 3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Отметим, что в этом примере можно было бы также взять $c_1 = c_2 = -1$. Тогда

$$x^4 - 7x^2 + 1 = \left(x^2 + \sqrt{5}x - 1\right)\left(x^2 - \sqrt{5}x - 1\right).$$

На этом пути были бы получены те же корни. С другой стороны, стандартная методика решений биквадратных уравнений приводит к более сложному выражению для корней $\pm\sqrt{\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}}$.

Задача 7. Решите методом неопределенных коэффициентов уравнения:

1) $x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = 0$; $\left(\left\{2 \pm \sqrt{3};\ 3 \pm \sqrt{7}\right\}\right)$

2) $x^4 - 12x^3 + 43x^2 - 42x + 6 = 0$; $\left(\left\{3 \pm 2\sqrt{2};\ 3 \pm \sqrt{3}\right\}\right)$

3) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 13x - 6 = 0$; $\left(\frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{17}\right)\right)$

4) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2 = 0$. $\left(\left\{\frac{7 \pm \sqrt{41}}{2};\ \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}\right)$

СМ 4. Метод производной функции

Многие задачи могут быть решены с помощью использования производных (т. е. операции дифференцирования функций). Приведем несколько иллюстраций на основе излагаемой в этой работе темы.

Выше уже отмечалось, что с помощью производных легко можно выяснять наличие строгой монотонности исследуемой функции. Это полезно в ситуациях, когда применим ОМ 3.

Пример 22. $(3 - x^3)^3 - x^9 - 7x = 0$.

Решение. Пусть $f(x) = (3 - x^3)^3 - x^9 - 7x$. Тогда

$$f'(x) = 3(3 - x^3)^2(-3x^2) - 9x^8 - 7 =$$
$$= -[9(3 - x^3)^2x^2 + 9x^8 + 7] < 0$$

для всех $x \in R$. Следовательно, функция f убывает на R, а исследуемое уравнение не может иметь более одного корня. Заметим, что $x = 1$ является его корнем.

Производные могут быть полезны при применении ОМ 4, поскольку школьники изучают алгоритм поиска экстремальных значений функции.

Пример 23. $x^4 - 8x^3 + 432 = 0$.

Решение. Пусть $f(x) = x^4 - 8x^3 + 432$. Тогда

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 = 4x^2(x - 6)$$

существует всюду на R. Поскольку уравнение $f'(x) = 0$ в данном случае имеет два корня $x = 0$ и $x = 6$, причем f' отрицательна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; 6)$, а на $(6; +\infty)$ положительна, то точка $x = 6$ – точка наименьшего значения этой функции. Более того, $f(x) > f(6)$ при $x \neq 6$. Так как $f(6) = 6^4 - 8 \cdot 6^3 = -432$, то 6 – единственный корень данного уравнения.

Производные могут помочь получить более простое выражение или способствуют поиску разложения левой части данного уравнения. В этом случае применяется следующая ***теорема 4***[3]:

Если два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ имеют тождественно равные производные, то существует константа C, для которой $P(x) = Q(x) + C$ для всех $x \in R$.

Пример 24.

$$(x + a + b)^3 - (x + a - b)^3 + (x - a - b)^3 - (x - a + b)^3 = 12ab.$$

Решение. Пусть $P(x)$ – выражение из левой части данного уравнения. Тогда

$$P'(x) = 3((x + a + b)^2 - (x + a - b)^2) + 3((x - a - b)^2 -$$
$$- (x - a + b)^2) = 6b(2x + 2a) + 6b(-2x + 2a) = 24ab.$$

Заметим, что производная многочлена $Q(x) = 24abx$ также равна $24ab$. Следовательно, в силу теоремы 4 имеем $P(x) = 24abx + C$. Отсюда получаем

$$C = P(0) = (a + b)^3 - (a - b)^3 + (-a - b)^3 - (-a + b)^3 = 0.$$

Поэтому $P(x) = 24abx$, а уравнение равносильно линейному

$$24abx = 12ab..$$

Ответ. 1) Если $ab = 0$, то x – любое; 2) в остальных случаях $x = 0{,}5$.

Производные позволяют обнаруживать кратные корни алгебраических уравнений. Метод основан на ***теореме 5*** ([1], с. 422):

Если многочлен $P_n(x)$ и его производная $P_n'(x)$ делятся на $x - x_0$, то $P_n(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.

Часто полезно ***следствие*** этой теоремы.

Если многочлен $P_n(x)$ и его производная $P_n'(x)$ делятся на многочлен $R(x)$, то $P_n(x)$ делится на $R^2(x)$. Более того, наибольший общий делитель многочленов $P_n(x)$ и $P_n'(x)$ имеет своими корнями лишь корни многочлена $P_n(x)$, причем только те из них, которые имеют кратность не менее 2.

Пример 25. $x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 0$.

Решение. Пусть $P(x) = x^4 + 4x^3 - 8x + 4$. Тогда

$$P'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 8 = 4(x + 1)(x^2 + 2x - 2).$$

Производная делится на $R(x) = x^2 + 2x - 2$. Делением «уголком» обнаруживаем, что $P(x)$ также делится на $R(x)$. Следовательно, $P(x)$ делится на $R^2(x)$. Теперь уже легко заметить, что $P(x) = R^2(x)$ и далее см. пример 6.

Замечание. Напомним, что как и НОД для двух натуральных чисел, наибольший общий делитель для многочленов $P_n(x)$ и $P_n'(x)$ можно найти с помощью алгоритма Евклида (только теперь «уголком» необходимо делить многочлен на многочлен: сначала $P_n(x)$ на $P_n'(x)$, затем $P_n'(x)$ на образовавшийся остаток, и т. д., пока не получим последний ненулевой остаток).

[3] Чтобы не обсуждать детали формулировки подобной теоремы в самом общем виде, сформулирован частный случай, достаточный для рассмотрения алгебраических уравнений.

Задача 8. Решите уравнения, применив производные:

1) $x^5 - 5x^3 + 108 = 0$; ($x = -3$)

2) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$. ($\varnothing$)

СМ 5. Метод Кронекера

Он является спецификацией ОМ 1 для алгебраических уравнений (1) и может быть полезен в тех случаях, когда коэффициенты уравнения (1) рациональны и многочлен в его левой части представим в виде произведения многочленов с рациональными же коэффициентами. На самом деле, коэффициенты уравнения (1) можно считать целыми. Более того, известно, что в этом случае и разложение достаточно искать только с целыми коэффициентами ([7], с. 118). Поскольку метод Кронекера требует перебора большого количества вариантов, мы ограничимся здесь иллюстрацией его основных этапов на одном примере.

Рассмотрим уравнение $3x^5 - 3x^4 - 4x^2 - 3x - 1 = 0$.

Пусть $P(x) = 3x^5 - 3x^4 - 4x^2 - 3x - 1$. Заметим, что если $P(x)$ разлагается в произведение многочленов с целыми коэффициентами, то один из них, пусть это $Q(x)$, имеет степень не выше 2. Далее *для любого целого числа k число $Q(k)$ должно быть делителем числа $P(k)$*. Это свойство можно использовать для того, чтобы за конечное количество шагов найти многочлен $Q(x)$ ([7], § 32).

Действительно, возьмем три (на 1 больше, чем степень искомого многочлена $Q(x)$) различных целых числа. Например, -1; 0; 1. Тогда $Q(-1)$ – делитель числа $P(-1) = -8$, $Q(0)$ – делитель числа $P(0) = -1$, $Q(1)$ – делитель числа $P(1) = -8$.

Для пробы предположим, что $Q(-1) = Q(1) = 2$ и $Q(0) = 1$.

По трем значениям в различных точках можно одн значно определить коэффициенты многочлена, степе которых не больше 2. Это можно сделать различными сп собами. В частности, по интерполяционной формуле Ла ранжа ([7], с. 111)

$$Q(x) = \frac{Q(-1)(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + \frac{Q(0)(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} +$$

$$+ \frac{Q(1)(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{2x(x-1)}{2} + \frac{x^2-1}{-1} + \frac{2x(x+1)}{2}$$

$$= x^2 - x - x^2 + 1 + x^2 + x = x^2 + 1.$$

Теперь необходимо проверить, действительно ли $P($ делится на полученный многочлен $Q(x)$. В данном случа поделив «уголком», имеем

$$P(x) = (x^2 + 1)(3x^3 - 3x^2 - 3x - 1).$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно куб ческому уравнению $3x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$, которое бы решено выше (пример 4).

В приведенном изложении первая же проба оказала удачной (естественно, что автор предложил именно таку пробу для достижения краткости текста). Суть мето Кронекера заключается в том, что если обсуждаемое ра ложение многочлена $P(x)$ имеется, то соответствующ многочлен $Q(x)$ будет обязательно найден при рассмотр нии одного за другим всех вариантов, определяемых ра личными комбинациями делителей чисел $P(-1)$, $P(0)$, $P($

Окончание следует

§ 3. Нестандартные методы (НМ) решения алгебраических уравнений

НМ 1. Метод симметризации

Пример 26. $(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 2.$

Решение. Пусть $x = t - 2$. Тогда $(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 2$, т. е. в силу формулы

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

имеем $2t^4 + 12t^2 = 0$. Отсюда легко получить, что $t = 0$ и, следовательно, $x = -2$ – единственный корень данного уравнения.

Суть примененного приема – использование такой подстановки, которая симметризует отдельные пары слагаемых, делает их «похожими», отличающимися лишь знаком. Обычно это удается, если имеется центр симметрии характерных для данного уравнения значений x: в нашем случае нули слагаемых $(x + 1)^4$ и $(x + 3)^4$, т. е. -1 и -3, симметричны относительно числа -2. Поэтому выгодна подстановка $x = t - 2$. Ее применение, как показано выше, привело к взаимному уничтожению слагаемых с нечетными степенями.

Пример 27. $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c.$

Указание. Симметризация подстановкой $x = t - \frac{a+b}{2}$ приводит к биквадратному уравнению

$$4t^4 + 6(a - b)^2t^2 + (a - b)^4 = 2c.$$

Пример 28 (*5-я Соросовская олимпиада, I тур*). Решите уравнение

$$x^5 + (x + 1)^5 + (x + 2)^5 + \ldots + (x + 1998)^5 = 0.$$

Решение. Симметризация подстановкой $x = t - 999$ приводит к уравнению

$$[(t - 999)^5 + (t + 999)^5] + [(t - 998)^5 + (t + 998)^5] + \ldots +$$
$$+ [(t - 1)^5 + (t + 1)^5] + t^5 = 0,$$

которое имеет очевидный корень $t = 0$. Остается заметить, что в силу свойства возрастания левой части уравнения этот корень единственный.

Ответ: $x = -999$.

Задача 9. Решите уравнения, используя симметризацию:

1) $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) + 16 = 0$; $\left(x = -3 \pm \sqrt{5}\right)$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9}$; $\{-3; 1\}$

3) $(x^2 - 7)^4 + (x^2 - 9)^4 = 16$. (*Указание*: $t = x^2 - 8$.)

Окончание. См. № 47/2000

НМ 2. Метод корней квадратных уравнений

Пример 29. $x^4 - 2\sqrt{3}\,x^2 - x + 3 - \sqrt{3} = 0.$

Решение. Преобразуем это уравнение в квадратное относительно новой переменной t. Пусть $t = \sqrt{3}$ (!). Тогда $3 = t^2$. Следовательно, данное уравнение после замены всех $\sqrt{3}$ на t, а чисел 3 – на t^2 можно представить, расположив его члены по убыванию степени t, следующим образом:

$$t^2 - (2x^2 + 1)t + (x^4 - x) = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения равен $(2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = (2x + 1)^2$. Следовательно,

$$t_{\pm} = \frac{1}{2}((2x^2 + 1) \pm (2x + 1)),\ t_+ = x^2 + x + 1,\ t_- = x^2 - x.$$

Осталось решить два квадратных уравнения:

1) $x^2 + x + 1 = \sqrt{3}$; 2) $x^2 - x = \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right)$, $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} + 1}\right)$.

Пример 30. $x^4 + 3x^2 + 6x - 5 = 0.$

Решение. Пусть $t = 3$. Тогда $6 = 2t$, $5 = 9 - 4 = t^2 - 4$, и данное уравнение становится квадратным относительно t:

$$t^2 - 2tx - (x^4 + 3x^2 + 4) = 0.$$

Имеем $t_{\pm} = x \pm (x^2 + 2)$. Осталось решить уравнения:

1) $x + x^2 + 2 = 3$; 2) $x - (x^2 + 2) = 3$.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$.

Задача 10. Решите уравнения НМ 2:

1) $x^4 + 3x^2 + 20x - 96 = 0$; (*Указание*: $t = 10$.)

2) $x^4 - 2\sqrt{2}\,x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$. (*Указание*: $t = \sqrt{2}$.)

Ответы: 1) $\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$; 2) $\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$.

НМ 3. Метод снятия дублирования при композиции

Речь идет о применении следующей *теоремы 6* ([6], с. 88):

Если функция $y = f(x)$ возрастающая на R, то

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x. \tag{7}$$

Пример 31.

$$(x^3 + x + 2)(x^6 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x + 5) - x + 2 = 0.$$

Решение. Заметим, что данное уравнение равносильно

$$(x^3 + x + 2)((x^3 + x + 2)^2 + 1) - x + 2 = 0,$$

$$(x^3 + x + 2)^3 + (x^3 + x + 2) + 2 = x.$$

Следовательно, для возрастающей функции

$$f(x) = x^3 + x + 2$$

имеем $f(f(x)) = x$. В силу теоремы 6 последнее уравнение равносильно

$$x^3 + x + 2 = x \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}.$$

Ответ: $x = -\sqrt[3]{2}$.

Замечание. Утверждение теоремы 6 может быть доказано и в случае, когда функция f возрастает лишь на некотором промежутке X, если при этом $f(X) \subseteq X$. Естественно, что тогда равносильность (7) выполняется также на X. Проиллюстрируем применение этой обобщенной формулировки.

Пример 32. $25x^4 + 10x^2 - 25x + 6 = 0$.

Решение. Выделим полный квадрат в левой части

$$(5x^2 + 1)^2 - 25x + 5 = 0.$$

Теперь можно заметить, что уравнение равносильно

$$(5x^2 + 1)^2 + 5 = 25x \Leftrightarrow (x^2 + 0{,}2)^2 + 0{,}2 = x.$$

Очевидно, что при $x < 0$ оно не имеет корней. На промежутке $X = [0; +\infty)$ функция $f(x) = x^2 + 0{,}2$ возрастает и принимает значения в этом же промежутке X. Тогда в силу замечания к теореме 6 последнее уравнение на X равносильно

$$x^2 + 0{,}2 = x,\ x_{\pm} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}.$$

Поскольку $x_{\pm} \in X$, то оба являются корнями и исходного уравнения.

Ответ: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$.

Задача 11. Методом НМ 3 решите уравнения:

1) $x^9 - 18x^6 + 108x^3 - x - 222 = 0$;

2) $x^9 + 3x^7 - 6x^6 + 3x^5 - 12x^4 + 14x^3 - 6x^2 + 12x - 12 = 0$.

Ответы: 1) $x = 2$ (*указание*: $f(x) = x^3 - 6$); 2) $x = \sqrt[3]{2}$ (*указание*: $f(x) = x^3 + x - 2$).

Задача 12. Найдите положительные значения a и b, для которых уравнение $a + b(a + bx^2)^2 = x$ имеет единственный корень.

Ответ: $4ab = 1$.

НМ 4. Метод геометрической прогрессии

Интересным является прием, основанный на применении формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q - 1} \quad (q \neq 1). \qquad (8)$$

Пример 33. $8x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение. Левая часть данного уравнения – сумма четырех первых членов геометрической прогрессии с $a = 1$, $q = 2x$. Очевидно, что значение $x = 0{,}5$ не удовлетворяет этому уравнению. Следовательно, в силу (8) данное уравнение равносильно

$$\frac{16x^4 - 1}{2x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^4 - 1 = 0, \\ 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = 0, \\ x \neq 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0, \\ x \neq 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -0{,}5.$$

Ответ: $x = -0{,}5$.

В этом примере можно было применить также либо группировку слагаемых с последующим выносом выражения $2x + 1$ за скобку, либо теорему 3. Однако в некоторых, пусть и весьма редких случаях, формула (8) позволяет быстро получить необходимое разложение многочлена и в ситуациях, когда нужная группировка слагаемых возможна, но не очевидна, а с помощью теоремы 3 невозможно найти ни одного корня.

Например, вместо неочевидного преобразования

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

при $x \neq 1$ можно предложить

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}.$$

Следовательно, уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ проще решить переходом к равносильной системе

$$\begin{cases} x^5 - 1 = 0, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда легко получить, что корней у него нет.

Задача 13. Используя формулу (8), решите уравнения:

1) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$; ($\varnothing$)

2) $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$. ($\varnothing$)

НМ 5. Метод тригонометрических подстановок

Пример 34. $8x^3 - 4x - 1 = 0$.

Решение. Уравнение равносильно $4x(2x^2 - 1) = 1$. Отсюда следует, что при $x \leqslant -1$ значение левой части отрицательно, а при $x \geqslant 1$ – больше 1, т. е. корни возможны только из $(-1; 1)$.

Тогда $x = \cos t$ при $t \in (0; \pi)$, и уравнение примет вид

$$4\cos t\,(2\cos^2 t - 1) = 1,\ 4\cos t \cos 2t = 1.$$

Это известное тригонометрическое уравнение. Один из способов решения его основан на том, что при этом $\sin t \neq 0$. Поэтому после умножения на $\sin t$ по формуле для синуса удвоенного угла получаем

$$\sin 4t = \sin t,\ 2\cos\frac{5t}{2}\sin\frac{3t}{2} = 0.$$

Отсюда, учитывая условие $t \in (0; \pi)$, выводим $t_1 = \dfrac{\pi}{5}$, $t_2 = \dfrac{3\pi}{5}$, $t_3 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}$, $x = \cos\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$.

Задача 14. Решите уравнения с помощью тригонометрических подстановок:

1) $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$;

2) $(16x^5 - 8x)(8x^4 - 8x + 1) = 1$.

Ответы: 1) $\mathrm{tg}^2\, 20°$, $\mathrm{tg}^2\, 40°$, $\mathrm{tg}^2\, 80°$ (*указание*: привести уравнение к виду $x(3 - x)^2(1 - 3x)^{-2} = 3$ и при $x = \mathrm{tg}^2\, t$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ использовать формулу для $\mathrm{tg}\, 3t$); 2) см. [6], с. 90.

НМ 6. Метод частных подходов на подмножествах R

Иногда для решения уравнения полезно исследовать его не на всем R сразу, а на отдельных промежутках, которые в совокупности образуют R. При этом на разных промежутках можно применять метод поиска корней, наиболее подходящий именно на рассматриваемом промежутке.

Пример 35. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.
Решение. Заметим, что при $x < 0$ $x = -|x|$ и

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^4 + |x|^3 + x^2 + |x| + 1 > 0,$$

т. е. среди значений $x \in (-\infty; 0)$ корней нет.

Аналогично, если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то левая часть уравнения

$$x^4 + x^2(1 - x) + (1 - x) > 0,$$

а при $x \geqslant 1$ также имеем

$$x^3(x - 1) + x(x - 1) + 1 > 0.$$

Ответ: (действительных) корней нет.

Задача 15. Решите уравнение
$x^6 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$. ($\varnothing$)

НМ 7. Метод введения двух переменных

Пример 36. $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$.
Решение. Пусть $u = x^2 + x + 1$, $v = x - 1$. Тогда

$$2u^2 - 7v^2 = 13uv.$$

Получили однородное уравнение второго порядка относительно u и v. Легко заметить, что значение $v = 0$ не годится для основного уравнения. Следовательно, поделив на v^2 и введя переменную $t = \frac{u}{v}$, находим $t_1 = -0,5$ и $t_2 = 7$. Теперь осталось решить уравнения:

1) $\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = -0,5$; 2) $\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = 7$.

Ответ: $\{-1; -0,5; 2; 4\}$.

Замечание. Пример 36 решается подстановкой

$$t = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}.$$

Таким образом, в данном примере «эффект введения двух переменных» свелся к преобразованию алгебраического уравнения в однородное (для которого известен метод решения приведением к другому алгебраическому уравнению). В иных случаях этот «эффект» может быть более значимым (например, [4], § 7, где изложен метод решения уравнений

$$\sqrt[n]{a - f(x)} + \sqrt[n]{b + f(x)} = g(x),$$

основанный на двух новых переменных).

Формулы Кардано для корней уравнения

$$x^3 + px + q = 0$$

выводятся с помощью введения двух переменных. Проиллюстрируем это на примере уравнения

$$x^3 + 9x - 26 = 0$$

(единственный действительный корень которого легко найти, применив сначала метод СМ 1).

Пусть $x = u + v$. Тогда рассматриваемое уравнение примет вид

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + 9) - 26 = 0.$$

Поскольку для поиска x мы имели возможность варьировать две величины, то первое уравнение, связывающее u и v, может быть произвольным. В нашем случае выгодно, чтобы выполнялось условие $3uv + 9 = 0$. Тогда $uv = -3$ и $u^3 + v^3 = 26$. Отсюда следует

$$\begin{cases} u^3v^3 = -27, \\ u^3 + v^3 = 26. \end{cases}$$

Последнее в силу теоремы Виета означает, что величины u^3 и v^3 являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 - 26t - 27 = 0,\ u^3 = -1,\ v^3 = 27$$

(или наоборот, что в данном случае не принципиально), т. е. $u = -1$, $v = 3$, поэтому $x = u + v = 2$.

Задача 16. Решите уравнения:

1) $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$; $\left(\left\{\pm 1; 2 \pm \sqrt{3}\right\}\right)$

2) $(x - a)^5 + (b - x)^5 + (a - b)^5 = 0$. (*Указание*: примените замены $u = x - a$, $v = a - b$ и используйте формулу бинома Ньютона при $n = 5$ в форме

$$(u + v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u + v)(u^2 + uv + v^2)).$$

НМ 8. Частные случаи метода ОМ 4*

Пример 37. $x^8 + x^6 - 8x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 24 = 0$.
Решение. Выделим полные квадраты

$$(x^4 - 4)^2 + \left(x^3 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 0.$$

Данное уравнение, очевидно, равносильно системе

$$\begin{cases} x^4 - 4 = 0, \\ x^3 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Пример 38. $(x^2 + 2x + 3)(2x^4 - 4x^2 + 3) = 2$.
Решение. Заметим, что

$$x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geqslant 2,$$
$$2x^4 - 4x^2 + 3 = 2(x^2 - 1)^2 + 1 \geqslant 1.$$

Так как при условии, что $f(x) \geqslant b > 0$, $g(x) \geqslant c > 0$ и $a = bc$ выполняется

$$f(x)\,g(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = b, \\ g(x) = c, \end{cases}$$

то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + 2 = 2, \\ 2\left(x^2 - 1\right)^2 + 1 = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x = -1$.

Задача 17. Решите уравнения:

1) $x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 = 0$; ($x = 1$)

2) $4(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 2) = 3$. ($\varnothing$)

---

* См. № 47/2000

НМ 9. Метод инвариантов

Иногда уравнение проще всего решить, используя идею инвариантности (неизменяемости) выражений относительно каких-либо подстановок. Например, функция $f(x) = x^2(x-1)^2$ не изменит своих значений, если вместо x подставить $1 - x$, т. е. $f(1-x) = f(x)$ для всех x. Аналогично функция $f(x) = x(x-1)^{-2}$ инвариантна относительно подстановки $t = x^{-1}$ при $x \neq 0$ и $x \neq 1$. Такие частные факты являются проявлениями интересного метода, суть которого может быть сформулирована следующим образом: если уравнение можно представить с помощью выражения, инвариантного относительно некоторых подстановок, то значение одного какого-либо корня означает, что найдены и другие корни (эта идея без осознания самого метода широко применяется в ситуации, когда все члены алгебраического уравнения имеют четную степень – см. пример 11). Особенно полезным наличие подстановок инвариантности будет тогда, когда количество корней, найденных с их помощью, совпадает с порядком алгебраического уравнения.

Пример 39. $36(x^2 - x + 1)^3 = 343x^2(x-1)^2$.

Решение. Так как $x^2 - x + 1 \neq 0$ при всех $x \in R$, то данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{x^2(x-1)^2}{\left(x^2-x+1\right)^3} = \frac{36}{343}.$$

При целенаправленном поиске подстановок инвариантности находим, что функция

$$f(x) = x^2(x-1)^2(x^2-x+1)^{-3}$$

инвариантна относительно подстановок x^{-1} и $1 - x$, а следовательно, и подстановок

$$\frac{1}{1-x},\ 1-\frac{1}{x},\ 1-\frac{1}{1-x},$$

получаемых комбинированием первых двух.

Заметим, что один из корней – $x_1 = 3$. Тогда с помо щью найденных подстановок инвариантности получае еще 5 корней

$$x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = 1 - 3 = -2,\ x_4 = \frac{1}{1-3} = -0{,}5,$$

$$x_5 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},\ x_6 = 1 - \frac{1}{1-3} = 1{,}5.$$

Поскольку исходное уравнение – 6-го порядка, а най дено 6 различных корней, то иных корней нет.

Ответ: $\left\{3; \frac{1}{3}; -2; -0{,}5; \frac{2}{3}; 1{,}5\right\}$.

Задача 18. Решите уравнение методом инвариантов

$2(x^2 - x + 1)^3 = \left(19 + 3\sqrt{2}\right)x^2(x-1)^2$.

Ответ: $\left\{\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1-\sqrt{2}; -1-\sqrt{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}; 2+\sqrt{2}\right\}$.

Литература

1. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченк П.И.* Задачи по математике. Начала анализа: Справочное посо бие. – М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

2. *Курош А.Г.* Алгебраические уравнения произвольных сте пеней. Популярные лекции по математике. Выпуск 7. – М Наука, 1983.

3. *Миракова Т.Н.* Развивающие задачи на уроках математи ки в 5–8 классах: Пособие для учителей. – Львов, журнал «Кван тор», № 3/91.

4. *Попов В.А.* Уравнения в курсе алгебры 9-летней школь Учебное пособие для классов с углубленным изучением матема тики. – Сыктывкар, ЛНД МО РК, 1995.

5. *Попов В.А.* Задачи с параметрами в курсе алгебры 9-лет ней школы. Учебное пособие. – Сыктывкар, РИПКРО МО РК 1997. – 109 с., илл.

6. *Шарыгин И.Ф., Голубев В.И.* Факультативный курс п математике: Решение задач: Учебное пособие для средней шко лы. – М., Просвещение, 1991.

7. *Б.Л. ван дер Варден.* Алгебра. – М., Наука, 1976.